

La funzione di Bresse

La funzione di Bresse ci permette di scoprire per quanto si propagano gli effetti di un rialzo sismico. Partiamo, assegnando una portata Q , dalla formula vista in precedenza:

$$\frac{dY}{dx} = \text{if} \frac{1 - \frac{[\Omega^2 c^2 g R \text{if}]_{Y=Y_u}}{\Omega^2 c^2 g R \text{if}}}{1 - \frac{[\Omega^3/b]_{Y=Y_c/b}}{\Omega^3/b}} =$$

Per le ipotesi di alveo a sezione rettangolare infinitamente largo e conduttanza C costante si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= \text{if} \frac{1 - \frac{[\Omega^2 c^2 g R \text{if}]_{Y=Y_u}}{\Omega^2 c^2 g R \text{if}}}{1 - \frac{[\Omega^3/b]_{Y=Y_c/b}}{\Omega^3/b}} = \text{if} \frac{\Omega^2 R - [\Omega^2 R]_{Y=Y_u}}{\Omega^2 R} = \\ &= \text{if} \frac{\Omega^2 R - [\Omega^2 R]_{Y=Y_u}}{\Omega^2 R} \cdot \frac{1}{b \left\{ \frac{\Omega^3}{b} - [\frac{\Omega^3}{b}]_{Y=Y_c/b} \right\}} = \\ &= \text{if} \frac{b^2 Y^2 \cdot \frac{dY}{b+2Y} - b^2 Y_u^2 \cdot \frac{b Y_u}{b+2Y_u}}{\frac{b}{b+2Y} \left[\frac{b^3 Y^3}{b} - \frac{b^3 Y_c^3}{b} \right]} = \text{if} \frac{b^2 \left[\frac{Y^3}{b(1+2Y/b)} - \frac{Y_u^3}{b(1+2Y_u/b)} \right]}{\frac{b^3}{b(1+2Y/b)} (Y^3 - Y_c^3)} \\ &= \text{if} \frac{Y^3 - Y_u^3}{Y^3 - Y_c^3} \quad \text{infatti } \frac{Y}{b} \rightarrow 0 \text{ per } b \gg Y \text{ (inf. largo)} \end{aligned}$$

In questo caso è possibile integrare l'equazione $\frac{dY}{dx} = \text{if} \frac{Y^3 - Y_u^3}{Y^3 - Y_c^3}$ e averla per via analitica.

Introduciamo anzitutto:

$$y = \frac{Y}{Y_u}$$

$$k = \frac{Y_c}{Y_u}$$

$$X = \frac{x}{Y_u / \text{if}}$$

Per cui risulta:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= \text{if} \frac{Y^3 - Y_u^3}{Y^3 - Y_c^3} \Rightarrow \frac{dY}{\text{if} dx} = \frac{Y_u^3 \left(\frac{Y^3}{Y_u^3} - 1 \right)}{Y_u^3 \left(\frac{Y^3}{Y_u^3} - \frac{Y_c^3}{Y_u^3} \right)} = \frac{y^3 - 1}{y^3 - k^3} \\ \Rightarrow \frac{d(Y_u \cdot y)}{\text{if} dx} &= \frac{y^3 - 1}{y^3 - k^3} \Rightarrow \frac{dY}{dx} \cdot \frac{Y_u}{\text{if}} = \frac{y^3 - 1}{y^3 - k^3} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dy = \frac{y^3 - 1}{y^3 - k^3} \cdot \frac{dx}{Y_u/Y_f} \Rightarrow \left[\frac{y^3 - k^3}{y^3 - 1} + 1 - 1 \right] dy = d\left(\frac{x}{Y_u/Y_f}\right)$$

$$\Rightarrow \left[1 + \frac{-y^3 + 1 + y^3 - k^3}{y^3 - 1} \right] dy = dX \Rightarrow dX = \left[1 - \frac{1 - k^3}{1 - y^3} \right] dy$$

Integriamo:

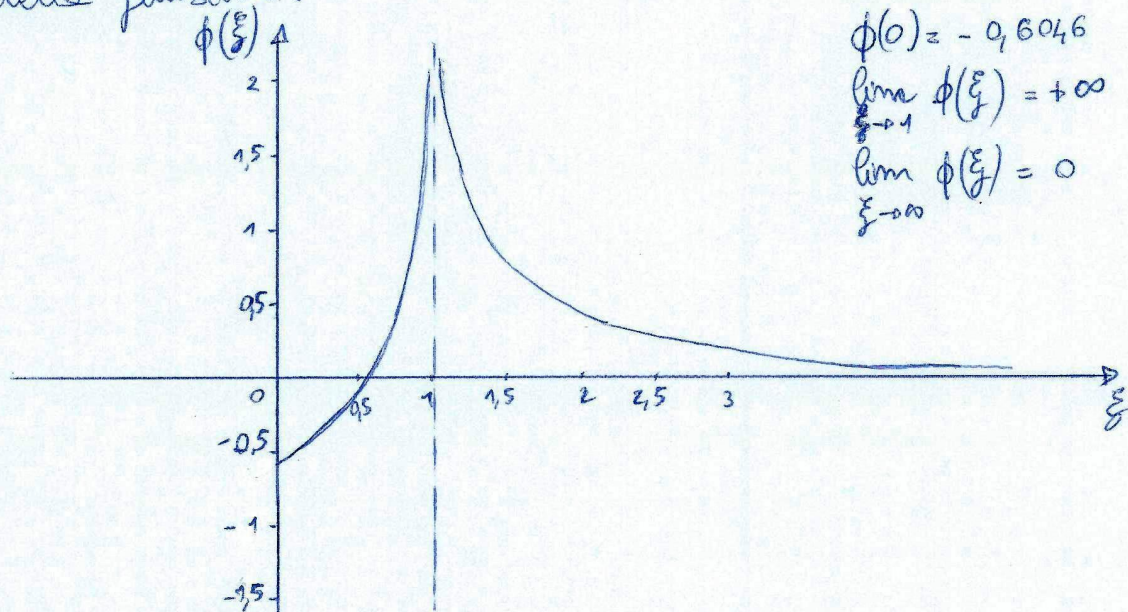
$$\int_{x_0}^x d\xi = \int_{Y_0/Y_u}^{Y/Y_u} \left[1 - \frac{1 - k^3}{1 - y^3} \right] dy \Rightarrow X - X_0 = \left(\frac{Y}{Y_u} - \frac{Y_0}{Y_u} \right) - (1 - k^3) \int_{Y_0/Y_u}^{Y/Y_u} \frac{dy}{1 - y^3}$$

L'integrale $\phi(\xi) = \int \frac{dy}{1 - y^3}$ è noto. Si ottiene:

$$X - X_0 = \left(\frac{Y}{Y_u} - \frac{Y_0}{Y_u} \right) - (1 - k^3) \left[\phi\left(\frac{Y}{Y_u}\right) - \phi\left(\frac{Y_0}{Y_u}\right) \right]$$

$$\text{Con } \phi\left(\frac{Y}{Y_u}\right) = \frac{1}{6} \ln \left[\frac{\xi^2 + \xi + 1}{(\xi - 1)^2} \right] - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2\xi + 1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \cos \theta$$

Si sceglie $\cos \theta = -0.6046$. In tal modo l'asintoto orizzontale della funzione va a coincidere con l'asse ξ . Ecco il grafico della funzione:



Per ogni ascissa x , assegnate Y_0 , y_f , Q , b e k_s , si ottiene Y combinando le due equazioni di $X - X_0$ e $\phi(\xi)$. Esprimendo $X = \frac{x}{Y_u/Y_f}$ si può ottenere x :

$$x - x_0 = \frac{Y_u}{y_f} \left\{ \left(y - y_0 \right) - (1 - k^3) \left[\phi(y) - \phi(y_0) \right] \right\}$$

Si ha $x > 0$ per un profilo di corrente veloce, $x < 0$ per uno di corrente lenta. Si pone di solito $x_0 = 0$.